

Ενδεικτικές ερωτήσεις προφορικής εξέτασης του  
Απειροστικού Λογισμού III.

Επιμέλεια: Παπίας Περικλής, Μαθηματικός MSc.

1. Διατυπώστε την ανισότητα Cauchy - Schwarz και εξηγήστε πότε ισχύει η ισότητα.
2. Ποιος είναι ο ρόλος της ανοιχτής μπάλας στην τοπολογία του  $\mathbb{R}^n$ ; (ερώτηση για αρκετή συζήτηση)
3. Σκεφτείτε ένα σύνολο  $A$  της επιλογής σας και δώστε τα μεμονωμένα σημεία, τα σημεία συσσώρευσης και τα σημεία επαφής του  $A$ .
4. Εξηγήστε, μέσω ακολουθιών, πότε ένα σύνολο  $U \subset \mathbb{R}^n$  καλείται κλειστό. Επίσης, δώστε ένα κλειστό σύνολο της επιλογής σας και τεκμηριώστε την απάντησή σας.
5. Περιγράψτε, με γεωμετρικό τρόπο, την καμπύλη στάθμης  $c \in \mathbb{R}$  μιας τυχούσας συνάρτησης  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .
6. Ποια είναι η διαφορά της συνέχειας μιας συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  από την συνέχεια μιας συνάρτησης  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ;
7. Αν μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής στο  $(0, 0)$  κατά μήκος κάθε ευθείας  $y = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , τότε αυτή είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ ;
8. Θέλετε να υπολογίσετε το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ , όπου  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής συνάρτηση. Κάνετε αλλαγή συντεταγμένων από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες και υπολογίζετε το “μετασχηματισμένο” όριο. Τι θα αποφανθείτε για το αρχικό όριο αν:
  - i) το “μετασχηματισμένο” όριο ισούται με  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,
  - ii) το “μετασχηματισμένο” όριο δεν υπάρχει.
9. Μπορεί μια συνάρτηση να είναι μερικώς διαφορίσιμη σ’ ένα σημείο, χωρίς να είναι συνεχής σε αυτό;
10. Ποια είναι η διαφορά της μερικής διαφορισιμότητας από της διαφορισιμότητας, μιας συνάρτησης  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ;
11. Τι είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  στο  $\bar{x}_0$  και τι ρόλο παίζει στη διαφορισιμότητα της  $f$  στο  $\bar{x}_0$ ;
12. Ποια είναι η διαφορά της παραγώγου κατά κατεύθυνση από την μερική παράγωγο; Σε ποια κατεύθυνση  $\bar{v}$ , η παράγωγος κατά κατεύθυνση  $D_{\bar{v}}f(\bar{x})$  ( $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) ταυτίζεται με την μερική παράγωγο;
13. Προσπαθήστε να σκεφτείτε ποια ήταν η λογική σκέψη, από την οποία επήλθε ο ορισμός της παραγώγου κατά κατεύθυνση.

14. Ισχύει πάντα ότι  $D_{\bar{v}}f(\bar{x}) = \text{grad } f(\bar{x}) \cdot \bar{v}$ , όπου  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{U}$  ανοιχτό;
15. Έστω  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  και  $\bar{x} \in \mathcal{U}$ . Ως προς ποια κατεύθυνση (με σημείο αναφοράς το  $\bar{x}$ ) η  $f$  παρουσιάζει τον μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης;
16. Περιγράψτε γεωμετρικά τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} 2020, & x^2 + y^2 \leq 5, \\ 0, & \text{αλλιου.} \end{cases}$$

- i) Σε ποια σημεία θα εξετάσετε την συνέχεια;
- ii) Μπορείτε να αποφανθείτε (βάση της γεωμετρικής ερμηνείας) για την συνέχεια, την μερική διαφορισιμότητα και την διαφορισιμότητα για την  $f$ ; Επίσης, βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στα σημεία του γραφήματος όπου υπάρχει.
- iii) Βρείτε (αν υπάρχουν) τα τοπικά και ολικά ακρότατα της  $f$ .

**Παρατήρηση:** Τα παραπάνω ερωτήματα μπορούν να απαντηθούν άμεσα, έχοντας απλά στο μυαλό σας το γράφημα της συνάρτησης.

17. Τι σου εγγυούνται τα Θεωρήματα Πεπλεγμένης και Αντίστροφης συνάρτησης; Τα αποτελέσματα αυτών είναι τοπικού ή ολικού περιεχομένου;